



TITLE:

Infinite Loop Space Machineの一意性 (無限ループ空間の位相)

AUTHOR(S):

平田, 浩一

CITATION:

平田, 浩一. Infinite Loop Space Machineの一意性 (無限ループ空間の位相). 数理解析研究所講究録 1980, 389: 1-8

ISSUE DATE:

1980-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104930>

RIGHT:

Infinite loop space machine の一意性

京大 数理研 平田浩一

May - Thomason の仕事の結果を紹介する。

Reference :

J. P. May and R. Thomason, The uniqueness of infinite loop space machine, Topology 17 (1978), 205-224

§1. Categories of operators

T is nondegenerately based compactly generated weak Hausdorff spaces の category とする。weak homotopy equivalences

$$X \rightrightarrows Y \leftarrow Z \rightrightarrows \dots \leftarrow W$$

があ, たとき, X と Y は equivalent であると呼ぶことにする。

category \mathcal{F} を次のように定義する。

$$ob(\mathcal{F}) = N \ni n = \{0, 1, 2, \dots, n\} \text{ with base point } 0$$

$$\mathcal{F}(m, n) : \text{based functions } m \rightarrow n \text{ 全体}$$

\mathcal{F} は Segal の category Γ の opposite category となる。 \mathcal{F} の sub-category Π is

$$\text{ob}(\Pi) = \mathbb{N}$$

$\Pi(m, n) \ni \phi: m \rightarrow n$ s.t. $1 \leq \forall j \leq n, |\phi^{-1}(j)| \leq 1$
 $\ni \ni$ $|\phi^{-1}(j)|$ は $\phi^{-1}(j)$ の cardinality を表わす。 \mathcal{F} と Π には,
 discrete topology を与えて, topological category とする。

Def 1.1 category of operators $(\mathcal{O}_f, \varepsilon)$:

\mathcal{O}_f は $\text{ob}(\mathcal{O}_f) = \mathbb{N}$ とする topological category \mathcal{T} inclusion $\Pi \hookrightarrow \mathcal{O}_f$
 があり, augmentation $\varepsilon: \mathcal{O}_f \rightarrow \mathcal{F}$ との composition $\Pi \hookrightarrow \mathcal{O}_f \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{F}$
 inclusion とするものとする。 $\ni \ni$ $\mathcal{O}_f(m, n) \ni 1$ は nondegenerate
 base pt とする。

category of operators \mathcal{O}_f には, さらに次の 2 つの仮定を付け
 加える。

仮定 1 injection $\phi \in \Pi(m, n) \subset \mathcal{O}_f(m, n)$ に対して,

$$\begin{array}{ccc} \coprod_q \mathcal{O}_f(q, m) & \longrightarrow & \coprod_q \mathcal{O}_f(q, n) \\ \downarrow \Psi & \longrightarrow & \downarrow \phi \circ \Psi \\ \Psi & \longrightarrow & \phi \circ \Psi \end{array}$$

は $\Sigma\phi$ equivariant cofibration である。 $\ni \ni$ $\Sigma\phi$ とは

$$\Sigma\phi = \{ \text{permutation } \sigma: m \rightarrow n \mid \sigma\phi = \phi \}.$$

その作用は, $\coprod_q \mathcal{O}_f(q, m)$ には trivial に働き, $\coprod_q \mathcal{O}_f(q, n)$ には
 $\Psi \mapsto \sigma \circ \Psi$ で働くものとする。

仮定 2 $\varepsilon: \mathcal{O}_f \rightarrow \mathcal{F}$ は equivalence である。即ち, 各 m, n
 に対して, $\mathcal{O}_f(m, n) \rightarrow \mathcal{F}(m, n)$ は equivalence (weak homotopy
 equivalence)。

category of operators \mathcal{O}_G , \mathcal{H} 間の map としては, 次の図式を可換とするものを考える。

$$\begin{array}{ccc} \Pi & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}_G \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{H} \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\epsilon} \\ \xleftarrow{\epsilon} \end{array}$$

また

equivalence とは, 各 $\mathcal{O}_G(m, n) \rightarrow \mathcal{H}(m, n)$ が equivalence となるものと言うことにする。

Def 1.2 \mathcal{O}_G -space $X: \mathcal{O}_G \rightarrow \mathcal{T}$:

X により n に対応する \mathcal{T} の object を X_n と書くことにすると
き, $\mathcal{O}_G(m, n) \rightarrow \text{Map}(X_m, X_n)$ の adjoint $\mathcal{O}_G(m, n) \times X_m \rightarrow X_n$
が continuous となる functor X で次の条件を満たすものをい
う。

(1) $X_0 \simeq *$

(2) $\delta_i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を $\delta_i(j) = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ となる Π の morphism と
としたとき, $(\delta_1, \dots, \delta_n): X_n \xrightarrow{\sim} (X_1)^n$.

(3) injection $\phi \in \Pi(m, n)$ に対して $\phi: X_m \rightarrow X_n$ は $\Sigma\phi$ -
equivariant cofibration.

\mathcal{O}_G -spaces 間の map としては, \mathcal{O}_G 上の natural transformation を
とり, equivalence としては各 n について, $X_n \rightarrow X'_n$ が equiv-
alence となるものをとることにする。 \mathcal{O}_G -spaces の category
を $\mathcal{O}_G[\mathcal{T}]$ と書く。

\mathcal{T} は $\Pi \hookrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{T}$ によ, \mathcal{T} category of operators とはり,
 \mathcal{T} -space とは Segal の Γ -space にほぼ等しい。(異なる点と

では, base point があること, (1), (2) が weak homotopy equivalence であること, Z が equivariant cofibration の条件が加えられ (2) であること) functor $\Delta^0 P \rightarrow \mathcal{T}$ が canonical に定義されるので, \mathcal{T} -space は proper simplicial space とみなせる。

§2. Infinite loop space machine

\mathcal{S}_p は connective Ω -spectra の category とする。これは spectrum $E = \{E_i, \sigma_i\}$ とし、 E_i が $(i-1)$ connected, $\sigma_i: E_i \rightarrow \Omega E_{i+1}$ が weak homotopy equivalence となるものを考え、map $f: E \rightarrow E'$ とし、

$$\begin{array}{ccc} E_i & \longrightarrow & E'_i \\ \sigma_i \downarrow & & \downarrow \sigma'_i \\ \Omega E_{i+1} & \longrightarrow & \Omega E'_{i+1} \end{array}$$

が strict に commute するものを考える。また, E, E' が equivalent とは $E \rightarrow E_1 \leftarrow E_2 \rightarrow \cdots \rightarrow E_n \leftarrow E'$ なる map の列があり、各 i に対して $E_i \rightarrow E_{1i} \leftarrow E_{2i} \rightarrow \cdots \rightarrow E_{ni} \leftarrow E'_i$ が全て weak homotopy equivalence になることをいうことにする。

Def 2.1 infinite loop space machine $E: \mathcal{G}[T] \rightarrow \mathcal{S}_p$ とは, $X \in \mathcal{G}[T]$ に対して $EX = \{E_i X, \sigma_i\}$ と書くことにしたとき, natural な group completion $v: X_1 \rightarrow E_0 X$ を伴う functor E である。

$v: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{T}$ は category of operators の map とする。Y が \mathcal{T} -space のとき, v によ, Y は \mathcal{G} -space となるので, v は

を v^*Y と書く。 X が \mathcal{H} -space のとき v_*X を次のように定める。

$$\mathcal{H}_m \equiv \coprod_q \mathcal{H}(q, m)$$

とするとき、 \mathcal{H}_m には v とよ、 \mathcal{H} が右から作用する。 また

$$X \equiv \coprod_q X_q$$

とするとき、 X に \mathcal{H} が左から作用する。 \circ で作用と書いた

のは、 $\mathcal{H}(m, q)$ と $\mathcal{H}(q, n)$ との composition, $\mathcal{H}(q, m) \times X_q \rightarrow$

X_m の \circ としてある。 two side bar construction によ、

$B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}, X)$ が定義され、 $B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}, *) \rightarrow B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}, X)$ は cofibration となる。 そこで

$$(v_*X)_m \equiv B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}, X) / B(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}, *)$$

とおけば、 v_*X への \mathcal{H} の作用も自然に定義されるので、

$$v_*X : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{T}$$

は functor となる。

Th. 2.2 $v: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ が equivalence のとき、 \mathcal{H} -space X に対して v_*X は \mathcal{H} -space となり、

$$v^*v_*X \leftarrow 1_*X \rightarrow X$$

は natural equivalence である。 また \mathcal{H} -space Y に対して、

$$v_*v^*Y \longrightarrow Y$$

は natural equivalence である。

これで準備が整、 ための May-Thomason の main theorem を述べることにする。

Th. 2.3 S を $\mathcal{F}[T]$ (Γ -space) 上で定義される Segal
の infinite loop space machine とし, E を $\mathcal{G}[T]$ 上で定義さ
れる任意の infinite loop space machine とする。

(1) $Y \in \mathcal{F}[T]$ のとき, natural equivalence

$$E(\epsilon^* Y) \simeq S(Y)$$

が存在する。

(2) $X \in \mathcal{G}[T]$ のとき, natural equivalence

$$E(X) \simeq S(\epsilon_* Y)$$

が存在する。

この定理によつて, どんな infinite loop space machine であ
っても input する data が等しい ば equivalent な spectrum を
output する ことがわかる。

§3. May の infinite loop space machine

May の machine は E_∞ -operad $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}(k), \gamma\}$ が作用する
space に対して定義されていたが, そのままでは §2 で定義
した infinite loop space machine とはならない。そこで May の
machine の再構成を以下に述べる。

Def. 3.1 category of operators $\hat{\mathcal{C}}$:

$$\hat{\mathcal{C}}(m, n) \equiv \coprod_{\phi \in \mathcal{F}(m, n)} \prod_{1 \leq j \leq n} \mathcal{C}(|\phi^{-1}(j)|)$$

$\hat{\mathcal{C}}(m, n)$ の元は $(\phi; c_1, \dots, c_n)$ または略して $(\phi; c)$ と書くことに

にする。composition は

$$(\phi; c_1, \dots, c_m) \circ (\psi; d_1, \dots, d_n) \equiv (\phi \circ \psi; \underbrace{\gamma(c_1; \prod_{\phi(i)=1} d_i)}_{\phi(i)=1} \sigma_1, \dots, \gamma(c_m; \prod_{\phi(i)=m} d_i) \sigma_m)$$

によ, τ 定義する。また $\epsilon: \mathcal{C}(m, n) \rightarrow \mathcal{F}(m, n)$ は $(\phi; c) \mapsto \phi$ とする。

$X \in \Pi\text{-space}$ とするとき $\hat{C}X$ は次のように定義する

$$\text{Def 3.2} \quad \hat{C}_n X = \coprod_{m \geq 0} \hat{C}(m, n) \times X_m \sim$$

ここで relation は, $(\phi; c) \in \hat{C}(m, n)$, $\psi \in \Pi(q, m)$, $x \in X_q$ と $(\tau; t) \in \hat{C}(q, n)$ と $(\phi; c)\psi, x) \sim ((\phi; c), \psi x)$

Prop 3.3 $\hat{C}X$ は $\Pi\text{-space}$ である。さらに \hat{C} は $\Pi[ET]$ 上の monad となる。

\hat{C} が $\Pi[ET]$ 上の monad となるのを \hat{C} -space, \hat{C} -functor が定義される。 \hat{C} -space について

Prop 3.4 \hat{C} -spaces と \hat{C} -spaces とは 1 対 1 に対応する。

\hat{C} -functor については, $\angle: \Pi[ET] \rightarrow T$ と $X \mapsto X_1$ によ, τ 定義したとき

Prop 3.5 F が \hat{C} -functor ならば FL は \hat{C} -functor となる。

ここで May の machine の定義は次のようになる。 \mathcal{C}_n は n -th little cubes operad, $\mathcal{D}_n \equiv \mathcal{C} \times \mathcal{C}_n$ とすれば, category of operators $\hat{\mathcal{D}}_n$, monad in $\Pi[ET]$ \hat{D} が定まる。 $X \in \hat{C}$ -space とするとき, X は \hat{D} -space となる。 Σ^n が \hat{C} -functor ならば, $\Sigma^n L$ は \hat{D} -functor となる。two side bar construction により

$$B(\Sigma^n L, \hat{D}_n, X)$$

が定義される。これは May の machine $M: \mathcal{C}[T] \rightarrow \mathcal{S}_p$ を
 $X \in \mathcal{C}[T]$ に対して

$$M(X) = \lim_j \Omega^j B(\Sigma^{i+j} L, \hat{D}_{i+j}, X)$$

と定義する。

Prop 3.6 M は infinite loop space machine である。